

# APPROXIMATION DIFFUSE DE LA PROPAGATION DU RAYONNEMENT : UN ALGORITHME D'INVERSION APPLIQUÉ A LA DETERMINATION DES PROPRIÉTÉS RADIATIVES

Fabien **DUBOT**<sup>a,b,\*</sup>, Olivier **BALIMA**<sup>a</sup>, Yann **FAVENNEC**<sup>b</sup>,  
Benoit **ROUSSEAU**<sup>b</sup>, Daniel **ROUSSE**<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Chaire de recherche industrielle en technologies de l'énergie et en efficacité énergétique (t3e),  
École de technologie supérieure, Montréal, Canada

<sup>b</sup> Laboratoire de thermocinétique de Nantes (LTN), UMR CNRS 6607, Université de Nantes, France

---

## RÉSUMÉ

La tomographie optique est une méthode inverse consistant à retrouver les propriétés radiatives du milieu considéré à partir de mesures optiques au bord. Le modèle direct sous-jacent utilisé dans le cadre de cette étude est l'approximation diffuse. L'inversion est basée sur l'algorithme d'optimisation du L-BFGS, le gradient étant calculé par la méthode de l'état adjoint développée sous la forme continue. Lors de l'étape de l'extraction du gradient, les deux normes  $L^2(\Omega)$  et  $H^1(\Omega)$  sont considérées. Les résultats présentés dans ce papier montrent une bonne adéquation entre les paramètres reconstruits par rapport à ceux recherchés.

*Mots Clés : tomographie optique, approximation diffuse, inversion, optimisation, L-BFGS, gradient de Sobolev*

---

## NOMENCLATURE

### Symboles :

$L$  luminance,  $W.m^{-2}.sr^{-1}$   
 $D$  coefficient de diffusion macroscopique, m  
 $c$  vitesse de la lumière dans le milieu,  $m.s^{-1}$   
 $j$  fonction de coût, m  
 $g$  paramètre d'anisotropie de la diffusion  
 $i$  variable imaginaire  
 $\mathbb{I}$  fonction indicatrice  
 $\mathcal{L}$  fonction de Lagrange  
 $n_r$  indice de réfraction  
 $P_m$  paramètre caractérisant la finesse du maillage  
 $A$  paramètre caractérisant la réflexion au bord de  $\Omega$   
 $s$  angle solide,  $sr^{-1}$   
 $L^2$  espace des fonctions réelles de carré intégrable  
 $H^1$  espace des fonctions  $L^2$  dont le carré des dérivées est intégrable

### Lettres grecques :

$\gamma$  paramètre dépendant de la dimension de  $\Omega$   
 $\nu$  fréquence de modulation du signal lumineux,  $s^{-1}$   
 $\Omega$  domaine d'étude  
 $\kappa$  coefficient d'absorption,  $m^{-1}$   
 $\sigma$  coefficient de diffusion,  $m^{-1}$   
 $\sigma'$  coefficient de diffusion réduit,  $m^{-1}$   
 $\Phi$  densité de photons,  $W.m^{-2}$   
 $\psi$  fonction de phase  
 $\partial\Omega_s$  emplacement des sources lumineuses  
 $\partial\Omega_d$  emplacement des détecteurs

### Indices / Exposants :

$d$  données synthétiques  
 $a$  milieu ambiant  
 $b$  Sobolev

---

## 1. INTRODUCTION

Que ce soit dans la détection de défauts dans des matériaux polymères semi-transparents ou encore dans des tissus biologiques, la tomographie infra-rouge est une technique de diagnostic non intrusive dont la mise en œuvre est beaucoup moins onéreuse que d'autres.

Les différentes étapes dans la mise en œuvre de la méthode inverse que constitue la tomographie optique (TO) sont communes à l'ensemble des chercheurs travaillant en inversion. Premièrement, il faut établir un modèle numérique décrivant fidèlement le phénomène physique considéré (modèle direct). Ensuite, la précision de la prédiction du modèle numérique est

\* auteur correspondant  
Adresse électronique : [fabien@t3e.info](mailto:fabien@t3e.info)

quantifiée par rapport aux données expérimentales fournies par les capteurs par la définition d'une fonction de coût. Enfin, les paramètres optiques au minimum de cette fonction seront considérés comme la solution du problème inverse. Il s'agit donc de résoudre le problème de minimisation de cette fonction de coût.

Pour ce faire, un algorithme de type gradient a été utilisé. Le gradient de la fonction de coût est calculé par la méthode de l'état adjoint sur les équations continues. Le gradient est d'abord extrait en utilisant le produit interne dans  $L^2(\Omega)$  puis dans  $H^1(\Omega)$  afin de préconditionner le système. Deux tests numériques sont effectués, le premier étant académique, le second étant relatif au diagnostic médical de la recherche de tumeurs dans un sein ([1], [2]).

## 2. FORMULATION DU PROBLÈME INVERSE

### 2.1. Le modèle direct

Il est communément admis que l'équation décrivant la propagation du rayonnement dans un milieu semi-transparent est l'Equation du Transfert Radiatif (ETR) [3]. Cette équation décrit l'évolution de la luminance, quantité locale et directionnelle, lors de son transport dans le milieu, et est donnée dans un cadre fréquentiel par :

$$\frac{2i\pi\nu}{c}L(r, s) + s \cdot \nabla L(r, s) = -(\kappa + \sigma)L(r, s) + \sigma \int_{4\pi} L(r, s') \psi(s, s') ds' \quad (1)$$

où  $r$  et  $s$  désignent respectivement les variables spatiale et angulaire,  $\psi$  est la fonction de phase. Dans cette expression l'émission thermique du milieu, due aux faibles températures des milieux considérés en TO, est négligée. L'ETR fréquentielle est une équation intégral-différentielle complexe en dimension 5 donc particulièrement difficile à résoudre ce qui nécessite un certain effort de calcul. Or le modèle direct considéré en TO doit vérifier idéalement deux conditions : d'une part, il doit décrire fidèlement la propagation du rayonnement dans le milieu afin de permettre un bon accord entre la modélisation numérique et les mesures expérimentales, d'autre part, puisque le modèle direct sera exécuté un grand nombre de fois durant l'optimisation, il doit pouvoir être résolu rapidement afin de disposer d'un algorithme d'inversion dont le temps de calcul n'est pas excessif. L'ETR vérifie cette première condition mais difficilement la seconde, c'est pourquoi la majorité des travaux en TO considère l'approximation diffuse (AD) comme équation du modèle direct. L'AD est la plus simple des approximations de l'ETR car elle décrit l'évolution de la densité de photons  $\Phi$ , grandeur non directionnelle puisque  $\Phi$  est le moment angulaire d'ordre 0 de la

luminance. Une description détaillée concernant l'obtention de l'AD à partir de l'ETR est donnée dans [4]. Soulignons que l'AD constitue un bon modèle du transport du rayonnement lorsque le milieu est hautement diffusif et faiblement absorbant. Elle est donnée par :

$$-\nabla \cdot (D \nabla \Phi) + \left( \kappa + \frac{2i\pi\nu}{c} \right) \Phi = 0 \quad (2)$$

associée à la condition aux limites de Robin non-homogène :

$$\Phi + \frac{A}{2\gamma} D(\nabla \Phi \cdot n) = \frac{I}{\gamma} \mathbb{I}_{[\xi \in \partial\Omega_s]}(\xi) \quad (3)$$

où  $D = [n_\Omega(\kappa + \sigma')]^{-1}$ ,  $\sigma' = (1 - g)\sigma$ ,  $\gamma$  dépend de la dimension du domaine d'étude  $\Omega$ ,  $n_\Omega$ , valant  $\pi^{-1}$  pour  $n_\Omega = 2$  et 0.25 pour  $n_\Omega = 3$ .  $I$  caractérise l'intensité de la source lumineuse obtenue après application de la transformée de Fourier au signal temporel.  $I$  est donc constante dans le cas d'un signal sinusoïdal. Le paramètre  $A$  caractérise la réflexion à la frontière du domaine causée par la différence entre les indices de réfraction du milieu étudié et du milieu ambiant, et peut être déterminé expérimentalement [5] ou dérivé des lois de Fresnel [6]. Cette dernière approche a été choisie, dans laquelle  $A$  s'exprime de la façon suivante :

$$A = \frac{2}{1-R_0} \frac{1 + |\cos \theta_c|^3}{1 - |\cos \theta_c|^2} \quad (4)$$

où  $\theta_c = \arcsin(n_r^a/n_r^\Omega)$  est l'angle critique à partir duquel le rayonnement émergeant subit une réflexion totale et  $R_0 = \left(\frac{n_r^\Omega}{n_r^a} - 1\right)^2 / \left(\frac{n_r^\Omega}{n_r^a} + 1\right)^2$ . L'existence et l'unicité de la solution  $\Phi: \Omega \mapsto \mathbb{C}$  de l'AD peut être facilement démontré à l'aide du théorème de Lax-Milgram dans sa version complexe [7].

### 2.2. Fonction de coût

Les détecteurs disposés près de la surface donnent accès à la valeur de la densité de photons émergeant du milieu. Une série de données expérimentales constituée de paires "sources-détecteurs" obtenue à l'aide de  $N_s$  sources lumineuses et  $N_d$  détecteurs situés en différents endroits de la frontière du domaine résulte des mesures. Une fonction de coût, qui doit être minimisée, est formulée afin de quantifier l'écart entre les prédictions et ces mesures. En toute généralité, cette fonction peut s'écrire :

$$j(\theta) := J(\Phi_R, \Phi_I) = \int_{\partial\Omega} Y(\Phi_R, \Phi_I) dx \quad (5)$$

où  $\theta = (\kappa, \sigma') \in [L^2(\Omega)]^2$  et  $\Phi_R$  et  $\Phi_I$  sont les composantes réelles et imaginaires de la densité de photons, respectivement. Se plaçant dans le cadre d'une minimisation au sens des moindres carrées, la fonction  $Y$  est supposée quadratique en  $\Phi_R$  et  $\Phi_I$ .

### 2.3. Problème de minimisation

On considère que le minimum local de cette fonction de coût forme la distribution des paramètres recherchés. On est donc amené à résoudre le problème de minimisation consistant à trouver  $\theta_0 \in [L^2(\Omega)]^2$  tel que

$$\theta_0 = \arg[\min j(\theta)] \quad (6)$$

sous la contrainte que  $\Phi$  soit solution de l'AD.

La dimension de l'espace de contrôle étant de grande dimension ( $\sim 1000-10000$  paramètres), seules les approches de type gradient sont envisageables pour résoudre le problème de minimisation. La plupart des auteurs travaillant sur la TO basée sur l'AD utilisent la méthode de Gauss-Newton [8] ou l'une de ses variantes. Ces méthodes nécessitent la résolution d'un système linéaire dont le nombre de conditionnement est généralement très élevé dû au caractère mal-posé du problème inverse, i.e. de petites erreurs sur les données expérimentales impliquent de grands écarts sur la solution. Nous privilégions donc plutôt une approche de type gradient ne reposant pas sur une inversion de matrice, comme les méthodes du gradient-conjugué ou du BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno). Ces méthodes qui nécessitent une recherche linéaire ainsi que le gradient de la fonction de coût sont moins sujettes au caractère mal-posé du problème inverse.

### 3. CALCUL DU GRADIENT DE LA FONCTION DE COÛT

Comme dit plus haut, la dimension de l'espace paramétrique étant grand, seule la méthode de l'état adjoint pour le calcul du gradient de la fonction de coût est envisageable. On introduit la fonction de Lagrange :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta, \Phi_R, \Phi_I, \Phi_R^*, \Phi_I^*) &= J(\Phi_R, \Phi_I) + \\ &(R_1(\theta, \Phi_R, \Phi_I), \Phi_R^*)_{L^2(\Omega)} + \\ &(R_2(\theta, \Phi_R, \Phi_I), \Phi_I^*)_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \quad (7)$$

où  $\Phi_R^*$  et  $\Phi_I^*$  représentent les variables adjointes de  $\Phi_R$  et  $\Phi_I$ , et  $R_1, R_2$  sont respectivement les résidus des parties réelles et imaginaires de l'équation (2). Remarquant que nous avons l'égalité  $\mathcal{L}(\theta, \Phi_R, \Phi_I, \Phi_R^*, \Phi_I^*) = J(\Phi_R, \Phi_I) = j(\theta)$  lorsque  $\Phi$  est solution de l'AD, nous en déduisons que pour toute direction  $\delta\alpha \in L^2(\Omega)$  et pour tout  $\Phi_R^*, \Phi_I^* \in H^1(\Omega)$  :

$$j'(\alpha; \delta\alpha) := (\nabla^\alpha j, \delta\alpha)_{L^2(\Omega)} \quad (8)$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} \delta\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_R} \frac{\partial \Phi_R}{\partial \alpha} \delta\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_I} \frac{\partial \Phi_I}{\partial \alpha} \delta\alpha \quad (9)$$

où  $\alpha$  peut faire référence ici à  $\kappa$  ou  $\sigma'$ . Après calcul de l'expression (9), nous pouvons montrer que la solution  $\Phi^* = \Phi_R^* + i\Phi_I^*$  du problème adjoint (10)-(11) permet d'accéder facilement aux composantes du gradient de la

fonction de coût pour chacun des deux paramètres. Le problème adjoint est donné par :

$$-\nabla \cdot (D \nabla \Phi^*) + \left( \kappa - \frac{2i\pi\nu}{c} \right) \Phi^* = 0 \quad (10)$$

$$\frac{2\gamma}{A} \Phi^* + D(\nabla \Phi^* \cdot n) = - \left( \frac{\partial \Upsilon}{\partial \Phi_R} + i \frac{\partial \Upsilon}{\partial \Phi_I} \right) \quad (11)$$

puis les gradients s'obtiennent par :

$$\nabla^\kappa j = \Re(\Phi \bar{\Phi}^* - n_\Omega D^2(\nabla \Phi \cdot \bar{\nabla} \Phi^*)) \quad (12)$$

$$\nabla^{\sigma'} j = \Re(-n_\Omega D^2(\nabla \Phi \cdot \bar{\nabla} \Phi^*)) \quad (13)$$

Comme les paramètres ainsi que les normes des gradients (12)-(13) ne sont pas du même ordre de grandeur, il semble difficile de trouver un pas de descente qui satisfasse la bonne reconstruction des deux paramètres. Pour remédier à ce problème, nous effectuons une mise à l'échelle des gradients de la façon suivante :

$$\nabla^\kappa j_m = c_\kappa \nabla^\kappa j \quad ; \quad \nabla^{\sigma'} j_m = c_{\sigma'} \nabla^{\sigma'} j \quad (14)$$

où l'indice  $m$  désigne la mise à l'échelle et les coefficients  $c_\kappa$  et  $c_{\sigma'}$  restent constants durant la reconstruction et sont calculés après la première itération par :

$$c_\kappa = 0.1 \frac{\max(\kappa_{iter=0})}{\max(|\nabla^\kappa j_{iter=1}|)} \quad (15)$$

$$c_{\sigma'} = 0.1 \frac{\max(\sigma'_{iter=0})}{\max(|\nabla^{\sigma'} j_{iter=1}|)} \quad (16)$$

### 4. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Nous considérons dans cette partie la fonction de coût suivante :

$$\Upsilon(\Phi_R, \Phi_I) = \frac{1}{2} \left| \frac{\Phi - \Phi^d}{\Phi^d} \right|^2 \mathbb{I}_{[\xi \in \partial\Omega_d]}(\xi) \quad (17)$$

L'implémentation de la méthode inverse a été effectuée sous l'environnement FreeFem++ [9] et avec l'aide de l'algorithme d'optimisation du L-BFGS [10] fourni par la distribution Ipopt [11]. Les propriétés radiatives sont initialisées à leurs valeurs de fond et le critère d'arrêt utilisé pour stopper l'algorithme porte sur le nombre d'itérations, limité à 50, fournissant ainsi les reconstructions recherchées dans un temps de calcul d'environ 5 minutes sur un ordinateur récent à la configuration standard. Nous présentons ci-après deux tests. Le premier est académique, le second est relatif à une application médicale : la recherche d'une tumeur dans un sein.

#### 4.1. Description du test 1

Nous effectuons la reconstruction simultanée des coefficients d'absorption et de diffusion réduit sur un

milieu test par l'algorithme précédemment décrit et en utilisant un jeu de 16 sources et 16 détecteurs dont le diamètre est de 4 mm. La géométrie du milieu test ainsi que la localisation des sources et des détecteurs sont présentées sur la Figure 1. Les valeurs des propriétés radiatives sont quant à elles données dans le Tableau 1.

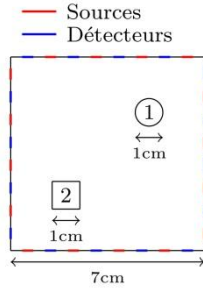


Figure 1 : Géométrie du milieu test et localisation des sources et des détecteurs

Tableau 1 : Valeur des propriétés radiatives

	$\kappa(\text{cm}^{-1})$	$\sigma'(\text{cm}^{-1})$
Fond	0.08	20
Inclusion 1	0.06	10
Inclusion 2	0.1	30

La géométrie du milieu test a été maillée triangulairement et uniformément avec un diamètre moyen des éléments du maillages égal à  $7.10^{-2}/P_m$  cm. Afin d'effectuer la reconstruction dans de bonnes conditions, le maillage de l'inversion doit être suffisamment fin. En effet, le modèle direct doit être résolu suffisamment précisément afin de pouvoir s'approcher des valeurs des données expérimentales. Nous avons observé une convergence au sens du maillage pour  $P_m = 50$ . Ne disposant pas de mesures expérimentales, nous avons considéré dans ce papier des données synthétiques (données expérimentales simulées). Afin d'éviter le crime inverse, les données synthétiques ont été générées sur le maillage obtenu pour  $P_m = 70$ . Le crime inverse se produit lorsque la variable d'état est calculée de la même manière que les données synthétiques (même équation, même maillage). Selon [12], ce cas de figure doit être évité car trop trivial. Enfin, dans le but de s'approcher de la réalité de l'expérimentation, les données synthétiques ont été bruitées en appliquant à chacun des nœuds des détecteurs un bruit blanc gaussien dont l'écart-type  $\sigma_{\phi^d}$  est relié aux valeurs de la densité de photon  $\Phi^d$  et au rapport signal sur bruit  $SNR$  à travers la formule :

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{\Phi^d}{\sigma_{\phi^d}} \quad (19)$$

Un rapport signal sur bruit de -13 dB a été choisi pour ce test. Soulignons que ce niveau de bruit semble

supérieur à celui des dispositifs expérimentaux typiquement utilisés en TO [13].

#### 4.2. Résultats du test 1

Nous présentons sur les Figures 2 et 3 les résultats obtenus pour le test 1. Ces figures représentent une coupe des propriétés radiatives recherchées du coin sud-ouest au coin nord-est.

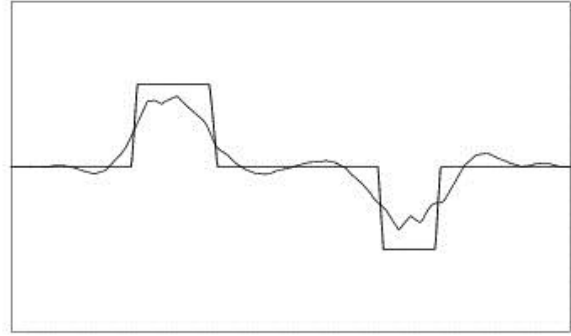


Figure 2 :Reconstruction 1-D du coefficient d'absorption  $\kappa$  le long de la ligne passant par le centre des deux inclusions

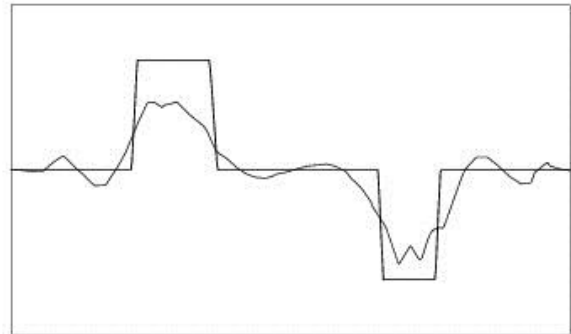


Figure 3 : Reconstruction 1-D du coefficient de diffusion réduit  $\sigma'$  le long de la ligne passant par le centre des deux inclusions

Nous observons que les allures générales des paramètres optiques sont relativement bien retrouvées, notamment compte-tenu du fait qu'aucune méthode de régularisation n'a été utilisée. En effet, une comparaison avec la littérature ([1], [14]) de reconstructions sur des cas tests similaires montrent que les profils retrouvés sont de très bonne qualité. Une étude bibliographique montre que la plupart des auteurs utilisent un algorithme basé sur les équations normales ce qui implique la résolution d'un système linéaire particulièrement mal-conditionné puisque le problème inverse est mal-posé. Ces auteurs doivent donc utiliser des moyens de régularisation tel que la méthode de pénalisation de Tikhonov ou encore la réduction de l'espace paramétrique.

Dans le cadre de ce papier, l'algorithme du L-BFGS, qui ne repose pas sur la résolution d'un système linéaire, exacerbe peu l'effet du caractère mal-posé. Dans ce sens, on peut considérer que la méthode du L-BFGS est régularisante par rapport aux méthodes basées sur les développements de Gauss-Newton.

#### 4.3. Description et résultats du test 2

Le second test, qui concerne une application d'imagerie médicale, consiste à retrouver les propriétés optiques dans un sein ([1], [2]). Le sein en question mesure 7 cm de profondeur sur une base de 16 cm. À la liaison sein-thorax, la condition aux limites de Robin (3) est appliquée avec le paramètre  $A$  de réflexion à la frontière (4) égal à 1. Pour mener le test, 12 sources ainsi que 12 détecteurs sont équirépartis le long de la frontière extérieure. Le rapport signal sur bruit choisi pour ce test est de -20 dB. Une seule tumeur est présente dans le sein, à une location lointaine des sources et détecteurs, et proche du thorax. Ceci constitue donc un test d'inversion particulièrement difficile. Pour ce cas particulier, les coefficients d'absorption et de diffusion réduit sont fixés à  $0,055\text{cm}^{-1}$  et  $11,5\text{ cm}^{-1}$  dans la tumeur et valent  $0,028\text{ cm}^{-1}$  et  $8,3\text{cm}^{-1}$  ailleurs [2].

Les figures 4 et 7 présentent ces propriétés optiques recherchées pour respectivement le coefficient d'absorption et le coefficient de diffusion réduit. Les figures 5 et 8 présentent les résultats de l'inversion pour lequel l'algorithme est celui utilisé au test 1. Il s'agit de la version « ordinaire » de l'algorithme d'inversion basé sur l'algorithme L-BFGS de Ipopt pour lequel le gradient de la fonction de coût est donné par l'état adjoint extrait à l'aide de la norme  $L^2(\Omega)$ . À la lecture de ces figures, il s'avère que le coefficient d'absorption est relativement bien retrouvé si l'on considère la forme générale de la tumeur. En revanche, le coefficient de diffusion réduit n'est pas du tout retrouvé, ni par sa valeur au sein de la tumeur, ni sur la forme générale de celle-ci.

La mise à l'échelle des gradients, utilisée pour pallier la différence en amplitude des deux propriétés de nature très différente, échoue dans ce test difficile. La stratégie mise en place pour remédier à cette difficulté consiste à utiliser dans l'équation (8) le produit interne dans  $H^1(\Omega)$  (au lieu du produit dans  $L^2(\Omega)$  classiquement utilisé) pour l'extraction du gradient de la fonction de coût :

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} uv \, dx + \sum_{i=1}^{n_{\Omega}} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx \quad (20)$$

Ces nouveaux gradients, appelés gradients de Sobolev et notés  $\nabla_b^{\alpha} j$ , peuvent être obtenus à partir des gradients précédemment calculés aux équations (12)-(13) par la résolution de l'équation [15] :

$$0.5 \times (1 - \Delta) \nabla_b^{\alpha} j = \nabla^{\alpha} j \quad (21)$$

Le choix du produit interne  $H^1(\Omega)$  agit comme un préconditionneur au sein de l'optimiseur. Il permet donc d'obtenir des composantes de gradient mis à la même échelle ce qui a pour effet d'améliorer la convergence. Les résultats basés sur cette norme  $H^1(\Omega)$  lors de l'extraction du gradient sont donnés dans les figures 6 et 9 pour respectivement les coefficients d'absorption et de diffusion réduit. Il s'avère que, même si les valeurs identifiées sont relativement loin des valeurs nominales, la forme générale de l'inclusion est bien retrouvée.

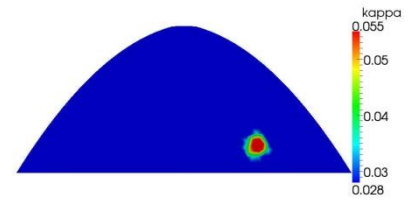


Figure 4 : Distribution spatiale du coefficient d'absorption  $\kappa$  à retrouver.

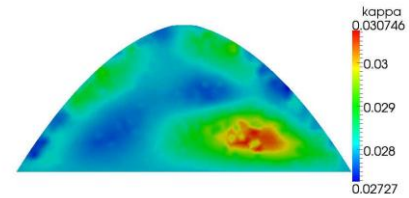


Figure 5 : Distribution reconstruite du coefficient d'absorption  $\kappa$  lorsque le produit scalaire  $L^2(\Omega)$  est utilisé pour l'extraction du gradient.

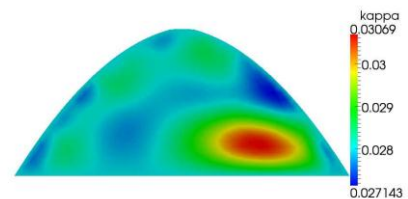


Figure 6 : Distribution reconstruite du coefficient d'absorption  $\kappa$  lorsque le produit scalaire  $H^1(\Omega)$  est utilisé pour l'extraction du gradient.

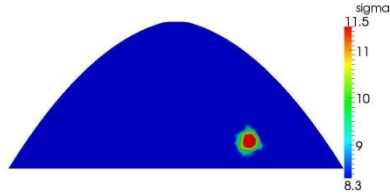


Figure 7 : Distribution spatiale du coefficient de diffusion réduit  $\sigma'$  à retrouver.

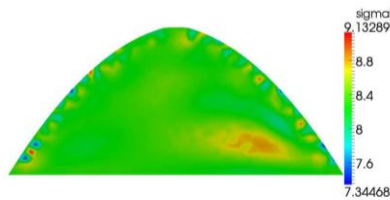


Figure 8 : Distribution reconstruite du coefficient de diffusion réduit  $\sigma'$  lorsque le produit scalaire  $L^2(\Omega)$  est utilisé pour l'extraction du gradient.

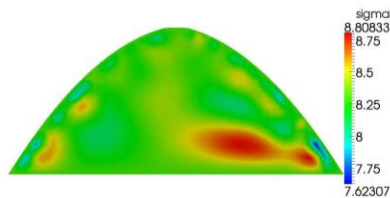


Figure 9 : Distribution reconstruite du coefficient de diffusion réduit  $\sigma'$  lorsque le produit scalaire  $H^1(\Omega)$  est utilisé pour l'extraction du gradient.

## 5. CONCLUSION

Un code d'inversion de l'approximation diffuse, qui décrit la propagation du rayonnement dans un milieu hautement diffusif et peu absorbant, a été développé et testé pour obtenir la reconstruction des coefficients d'absorption et de diffusion réduit d'un milieu semi-transparent. Cet algorithme repose sur la méthode du L-BFGS, le calcul du gradient étant effectué par la méthode de l'état adjoint. L'efficacité de ces développements a été montrée sur un cas académique

puis sur un domaine de grande taille, pour lequel l'utilisation de la norme  $H^1(\Omega)$  pour l'extraction du gradient s'est avérée nécessaire. Par rapport aux résultats issus de la littérature ([1], [14]), qui utilisent majoritairement l'optimiseur de Gauss-Newton et sont donc obligés d'utiliser des techniques de régularisation (pénalisation de Tikhonov, Levenberg-Marquard), ceux présentés dans cet article semblent moins sensibles au caractère mal-posé du problème inverse. Ceci doit être dû au fait qu'aucun système linéaire n'est résolu au sein de l'optimiseur. Nous pensons donc que par rapport aux méthodes de Gauss-Newton ou ses variantes, l'utilisation de la méthode du L-BFGS constitue en soi une régularisation. Une comparaison plus approfondie fera l'objet d'une prochaine étude.

## RÉFÉRENCES

- [1] JIANG, H., Diffuse Optical Tomography – Principles and Applications, *CRC Press*, (2011).
- [2] CHERNOMORDIK, V., et al., Quantification of optical properties of a breast tumor using random walk theory, *Journal of Biomedical Optics*, pp. 80-87, (2002).
- [3] MODEST, M.F., Radiative Heat Transfer, *McGraw-Hill*, pp. 263-285, (2003).
- [4] ARRIDGE, S.R., Optical tomography in medical imaging, *Inverse Problems*, pp. R41-R93, (1999).
- [5] TARVAINEN, T., Computational methods for light transport in optical tomography, *Ph.D. thesis*, (2006).
- [6] DEGHANI, H., et al., Numerical modelling and image reconstruction in diffuse optical tomography, *Phil. Trans. R. Soc. A*, pp. 3073-3093, (2009).
- [7] BRATTKA, V., et YOSHIKAWA, A., Towards computability of elliptic boundary value problems in variational formulation, *Journal of Complexity*, pp. 858-880, (2006).
- [8] FAVENNEC, Y., et LE MASSON, P., et JARNY, Y., Optimization methods for non linear estimation or function estimation, *Proceeding of Eurotherm Seminar 94 : METTI 5 Advanced Spring School "Thermal Measurements and Inverse Techniques"*, Roscoff, France, chap. 7, (2011).
- [9] HECHT, F., et PIRONNEAU, O., et MORICE, J., « *FreeFem++*, [www.freefem.org/ff++/](http://www.freefem.org/ff++/) ».
- [10] LIU, D.C., et NOCEDAL, J., On the limited memory BFGS method for large scale optimization, *Mathematical Programming*, pp. 503-528, (1989).
- [11] WACHTER, A., et BIEGLER, L.T., On the implementation of a Primal-Dual Interior Point Filter Line Search Algorithm for Large-Scale Nonlinear Programming, *Mathematical Programming*, pp. 25-57, (2006).
- [12] COLTON, D., et KRESS, R., Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory, *Springer*, pp. 133, 304, (1998).
- [13] SONG, X., et al., Statistical Analysis of Nonlinearly Reconstructed Near-Infrared Tomographic Images: Part II-Experimental Interpretation, *IEEE Trans. Med. Imaging*, pp. 764-773, (2002).
- [14] NIU, H., et al., Improving image quality of diffuse optical tomography with a projection-error-based adaptive regularization method, *Optics Express*, pp. 12423-12434, (2008).
- [15] PROTAS, B., et BEWLEY, T.R., et HAGEN G., A computational framework for the regularization of adjoint analysis in multiscale PDE systems, *Journal of Computational Physics*, pp. 49-89, (2004).